

文章编号 1004-924X(2009)12-3034-06

# 椭圆拟合方法在磁罗盘罗差校准中的应用

孙宏伟<sup>1</sup>, 房建成<sup>1</sup>, 李艳<sup>2</sup>

(1. 北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院 新型惯性仪表与导航系统技术国防重点学科实验室, 北京 100191; 2. 中国人民解放军总参谋部第55研究所, 北京 100190)

**摘要:** 磁罗盘在使用过程中受周围铁磁物质的影响致使航向精度降低, 因此对磁罗盘进行校准是十分必要的。针对传统的磁罗盘罗差校准算法存在系数矩阵易奇异导致算法不稳定的问题, 提出了改进的最小二乘椭圆拟合算法。分析了外界磁干扰对磁罗盘输出的影响, 建立了罗差的椭圆模型, 通过对系数矩阵的奇异性进行分析, 采用最小二乘方法实现了对椭圆模型误差系数的辨识。该算法克服了原有算法的不稳定性, 对校准过程中的突变干扰有很强的抑制能力, 同时将六维特征矢量的求解转化为三维特征矢量求解, 在保证校准精度的情况下降低了计算量。多位置转台实验验证了该方法的有效性和实用性, 校准后的磁罗盘精度由  $0.8^\circ$  提高到  $0.4^\circ$ , 满足了导航系统的需求。

**关键词:** 磁罗盘; 罗差; 校准; 最小二乘法; 椭圆拟合; 奇异性

**中图分类号:** V249.32 **文献标识码:** A

## Application of ellipse fitting method to calibration of magnetic compass deviation

SUN Hong-wei<sup>1</sup>, FANG Jian-cheng<sup>1</sup>, Li Yan<sup>2</sup>

(1. *The National Defense Key Science Laboratory of Novel Inertial Instrument & Navigation System Technology, School of Instrument and Optoelectric Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;*

2. *The 55th Research Institute of the PLA General Staff Headquarters, Beijing 100190, China*)

**Abstract:** It is essential to calibrate the compass deviation for a magnetic compass, for the navigation precision of the magnetic compass can be affected by the ferromagnetic materials in working environments. An improved least square ellipse fitting method was presented in this paper to improve the stability of the traditional calibration method that the coefficient matrix may be singular. The effect of the magnetic interference on the output of magnetic compass was analyzed and an ellipse model for the compass deviation was established. By analysis on the singularity of a coefficient matrix, the error coefficients of the ellipse model were identified by the least square ellipse fitting method. Experimental results show that the method suppresses the instability and prevents from the pulse disturbance. Moreover, by transforming six dimensional eigenvector's solutions into three dimensional eigenvector's solutions, it can reduce the computation load while keeping the precision. The multi-position experimen-

收稿日期: 2008-11-17; 修订日期: 2009-02-24.

基金项目: 国防基础科研重大项目 (No. D2120060013); 国家自然科学基金重点资助项目 (No. 60736025)

tal results prove the validity and practicality of this method and show that the precision of the calibrated magnetic compass is improved from  $0.8^\circ$  to  $0.4^\circ$ , which meets the requirement of the navigation system.

**Key words:** magnetic compass; compass deviation; calibration; least square method; ellipse fitting; singularity

## 1 引言

磁罗盘通过测量地球磁场的三维投影来确定载体的航向信息,当 GPS 信号受到遮挡,INS 系统由于误差积累导致导航信息发散时,都需要磁罗盘来对导航参数进行组合修正,同时磁罗盘具有体积小、成本低、无累计误差、能够自动寻北等特点,已广泛应用于飞行器、车辆等的导航系统<sup>[1]</sup>。虽然磁罗盘具有以上优点,但其精度会受到周围电源、导线、电机等铁磁物质的影响,因此其校准技术成为研究的热点。

外界对磁罗盘的干扰可以分为硬磁干扰和软磁干扰(罗差)两类。硬磁干扰的大小和方向相对固定,容易消除。罗差的大小和方向相对磁罗盘是变化的,不易消除,制约着磁罗盘的精度。

传统的磁罗盘罗差校准方法主要有 3 类:

(1)与基准航向对比实现校准的方式:常采用神经网络方法<sup>[2-3]</sup>,但在外场很难找到高精度的航向基准,并且神经元的训练需要很大的计算量不利于实施;

(2)采用冗余传感器实现校准的方式:常采用磁罗盘与 GPS、惯导系统进行组合校准<sup>[4-5]</sup>,或采用差分罗盘<sup>[6]</sup>,但这种方式会大大增加系统成本;

(3)采用磁罗盘自校准的方式:主要有 swing 方法<sup>[7]</sup>和最小二乘椭圆拟合法<sup>[8]</sup>。相对前者,后者在校准过程中抗突变干扰能力更好。

最小二乘椭圆拟合校准方法可以在不增加成本情况下实现高精度的校准,但传统的最小二乘拟合算法存在由于系数矩阵奇异引起的不稳定问题。针对这一不足,本文通过对系数矩阵的奇异性进行分析,提出了改进的最小二乘椭圆拟合算法,克服了传统算法的不稳定性,对校准过程中的突变干扰有很强的抑制能力,同时该算法将六维特征矢量的求解转化为三维特征矢量求解,降低了计算量。实验结果验证了此方法的有效性和实

用性,校准后的磁罗盘精度提高一倍,满足了导航系统的需求。

## 2 传统的最小二乘拟合校准方法

当无外界磁干扰时,磁罗盘水平转动一周,两个水平方向磁场矢量的输出为圆形(如图 1(a)所示)。硬磁干扰使磁罗盘输出曲线的圆心发生偏移(如图 1(b)所示),航向误差为周期性的(如图 1(c)所示)。罗差使磁罗盘输出转变成椭圆,并且椭圆曲线主轴与坐标轴成  $\theta$  角(如图 1(d)所示),航向误差如图 1(c)虚线所示。因此罗差校准的问题转变为椭圆拟合问题,多采用最小二乘拟合方法求解,关键在于计算方向角。

设磁罗盘在水平面内转动一周(忽略姿态误差因素),两个水平方向( $X$ 、 $Y$ )的磁场矢量大小为:

$$\begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rn} \\ y_{r1} & y_{r2} & \cdots & y_{rn} \end{bmatrix}.$$

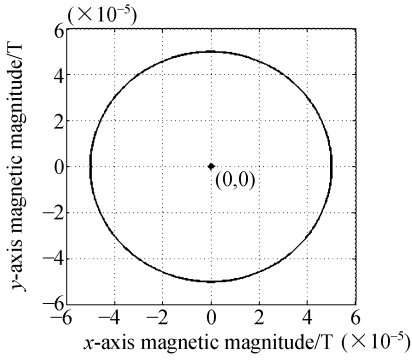
椭圆作为二次曲线的一种可以由一般二次多项式来表示,如式(1)所示。

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{a} = [a \ b \ c \ d \ e \ f]^T$  为参数向量,  $\mathbf{x} = [x^2 \ xy \ y^2 \ x \ y \ 1]^T$ 。  $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i)$  为点  $(x_i, y_i)$  到曲线  $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$  的几何距离。椭圆拟合问题实际上是求取参数矢量  $\mathbf{a}$  使得实验数据  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 到曲线  $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$  几何距离的平方和最小,即  $\min_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^n F(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i)^2$ 。

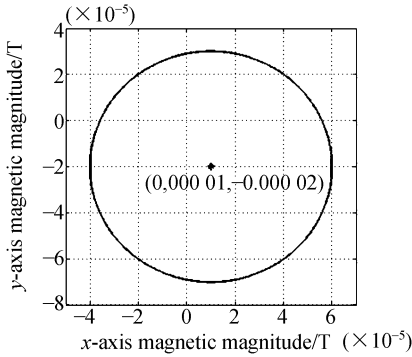
当采用标准最小二乘方法求解  $\mathbf{a}$  时会出现  $\mathbf{a} = 0$  的奇异点,而且受污染的实验数据易造成拟合曲线发散成双曲线。为了确保拟合结果为椭圆,需要施加  $4ac - b^2 > 0$  的约束。为此, Fitzgibbon 对公式(1)进行重构并提出  $4ac - b^2 = 1$  的等式约束<sup>[9]</sup>,如式(2)所示。

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{D}\mathbf{a}\|^2 \text{ subject to } \mathbf{a}^T \mathbf{C}\mathbf{a} = 1, \quad (2)$$



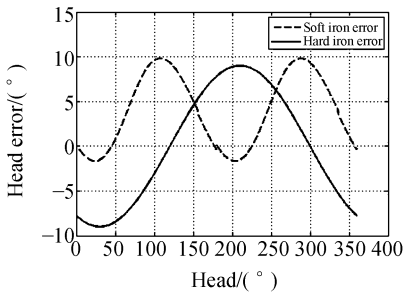
(a)理想磁罗盘输出

(a) Output of magnetic compass without disturbance



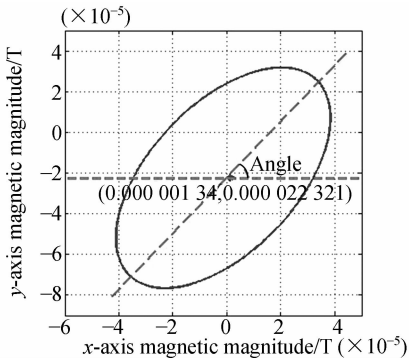
(b)硬磁干扰下磁罗盘输出

(b) Output of magnetic compass under hard disturbance



(c)磁干扰对航向影响

(c) Head error by disturbance



(d)软磁干扰下磁罗盘输出

(d) Output of magnetic compass under soft disturbance

图 1 磁干扰的影响

Fig. 1 Impact of magnetic deviation

其中:  $D = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i & y_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}, C =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

采用拉格朗日乘子将公式(2)转化为公式(3),就可以通过解特征矢量的方法求得  $a$ ,再根据约束条件  $a^T C a = 1$  挑选出最优解。然后根据公式(4)由最优解  $a$  求得椭圆的方向角  $\theta$ 。

$$\begin{cases} S a = \lambda C a \\ a^T C a = 1 \\ S = D^T D \end{cases}, \quad (3)$$

$$\theta = 0.5 \cdot \arctan(2b/(c-a)). \quad (4)$$

虽然 Fitzgibbon 对算法的有效性和可靠性进行了论证并通过实验进行验证,但是由于约束矩阵  $C$  奇异,矩阵  $S$  某些情况下(实验数据点都位于椭圆上或某些数据点重合时)也会奇异,造成公式(3)在解算特征矢量时不稳定。

### 3 改进的最小二乘拟合校准方法

首先根据矩阵的特殊结构对矩阵  $S, C$  和  $D$  进行如下分解:

$$D = (D_1 | D_2),$$

其中:  $D_1 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & y_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix},$

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix},$$

其中:  $S_1 = D_1^T D_1, S_2 = D_1^T D_2, S_3 = D_2^T D_2,$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中:  $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix},$$

其中:  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$

基于上述矩阵的分解,公式(3)转化为下面两式:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{C}_1 \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 + \mathbf{S}_3 \mathbf{a}_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

根据文献[10]可知矩阵  $\mathbf{S}_3$  是散射矩阵,在所有实验数据都位于椭圆上时或存在重合数据点时,矩阵  $\mathbf{S}_3$  就会奇异。下面根据矩阵  $\mathbf{S}_3$  的奇异性分两种情况进行解算:

(1) 矩阵  $\mathbf{S}_3$  非奇异(正定)

这种情况下矩阵  $\mathbf{S}_3$  是正定的,即存在  $\mathbf{S}_3^{-1}$ ,  $\mathbf{a}_2$  可以由公式(6)表示:

$$\mathbf{a}_2 = -\mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1. \quad (6)$$

将公式(6)代入公式(5)可得参数矢量  $\mathbf{a}$  的解:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{S}_2^T) \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}_2 = -\mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

这样公式(3)对六维特征矢量的求解转换为公式(7)对三维特征矢量求解。由于特征矢量求解的计算量主要集中在迭代算法上,因此综合考虑计算量降低一倍左右。同时采用改进的最小二乘椭圆拟合算法在精度上与传统算法是一致的。

(2) 矩阵  $\mathbf{S}_3$  奇异

这种情况说明磁罗盘实验数据没有受到外界环境的污染,根据文献[5]提出的刚体最小二阶惯性矩法采用公式(8)求解  $\theta$  角,克服了传统算法由于矩阵  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{S}$  不满秩造成的不稳定。

$$\theta = 0.5 \cdot \tan^{-1} [(2 \cdot U_{xy}) / (U_{xx} - U_{yy})], \quad (8)$$

式中  $U_{xx}$ 、 $U_{yy}$ 、 $U_{xy}$  分别为  $x$ 、 $y$  以及混合轴向力矩。表示为:

$$U_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ri} - x_h)^2, U_{yy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{ri} - y_h)^2,$$

$$U_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ri} - x_h)(y_{ri} - y_h).$$

该种方法的缺点是对数据零偏( $x_h, y_h$ )敏感,

但由于该方法的前提是未受外界污染的磁罗盘数据,因此可以准确的求出零偏,该方法可以与最小二乘椭圆拟合方法实现互补校准。

## 4 实验分析

### 4.1 校准实验

将磁罗盘水平放置于无磁转台上旋转一周进行校准(如图 2),根据校准数据求解得到椭圆参数矢量如表 1 所示,采样数据点及拟合椭圆如图 3 所示。

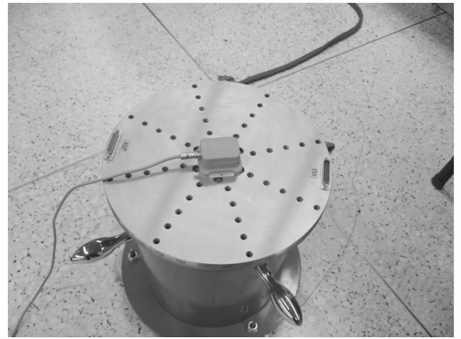


图 2 磁罗盘校准过程

Fig. 2 Process of calibrating magnetic compass

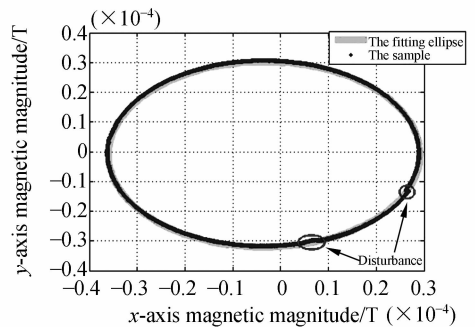


图 3 磁罗盘校准结果

Fig. 3 Calibrated results of magnetic compass

表 1 校准的椭圆参数值

Tab. 1 Calibrated ellipse values

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
0.675 5	0.005 2	0.737 4	0.047 5	0.009 3	-0.071 0

根据公式(9)和所求得的椭圆参数矢量  $\mathbf{a}$  ( $[a, b, c, d, e, f]^T$ ) 得到由于罗差造成的椭圆方向角  $\theta$  为  $2.4163^\circ$ 。

$$\theta = \arccot((a-c)/b), \quad (9)$$

设经过补偿硬磁干扰后磁罗盘两个水平轴向磁场强度为 $(H_x, H_y)$ , 则可以通过公式(10)来实现对磁罗盘的罗差补偿, 得到补偿后的磁场强度 $(H_{x'}, H_{y'})$ 。然后由公式(11)根据补偿后的水平方向磁场强度求得此时的航向角 $\varphi$ 。

$$\begin{bmatrix} H_{x'} \\ H_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\varphi = \arctan(H_{y'}/H_{x'}) \cdot (180/\pi). \quad (11)$$

## 4.2 验证实验

将磁罗盘放在水平无磁转台上, 并保证磁罗盘安装基准与转台方向基准平行。从北向开始每隔 $30^\circ$ 旋转一个位置, 共计 12 个角位置, 记录磁罗盘每个位置下的磁场强度。分别采用本方法和 swing 方法<sup>[7]</sup>对磁罗盘输出进行校正, 并计算航向输出。将磁罗盘航向与转台方向的差值作为航向误差。实验结果如图 4 所示, 实线表示 swing 方法校正结果, 虚线表示本方法的校正结果。实验表明: 经过校准, 磁罗盘航向精度在 $0.4^\circ$ 左右, 相比较其余方法该方法具有较强的抗突变干扰能力。

## 参考文献:

- [1] 李希胜, 王家鑫, 汤程, 等. 高精度磁电子罗盘的研制[J]. 传感技术学报, 2006, 19(6): 2441-2444.  
LI X SH, WANG J X, TANG CH, et al.. Development of high accuracy magnetic electronic compass [J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2006, 19(6): 2441-2444. (in Chinese)
- [2] WANG J H, GAO Y. A new magnetic compass calibration algorithm using neural networks [J]. *Measurement Science and Technology*, 2006, 17: 153-160.
- [3] KWON W, ROH K S, SUNG H K. Particle filter-based heading estimation using magnetic compasses for mobile robot navigation [C]. *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Orlando, 2006: 2705-2712.
- [4] KAO W W, TSAI C L. Adaptive and learning calibration of magnetic compass [J]. *Measure Science and Technology*, 2006, 17: 3073-3082.
- [5] VALDIMIR Y, SKVORTZOV. Application of e-

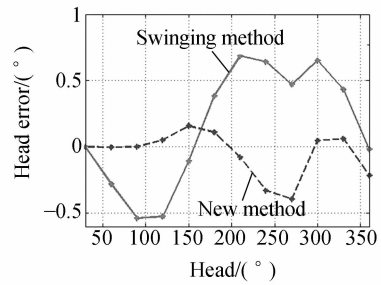


图 4 磁罗盘校准比较结果

Fig. 4 Comparison of compass calibration

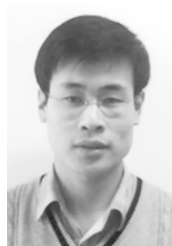
## 5 结 论

本文针对传统磁罗盘最小二乘椭圆拟合校准算法的不稳定性问题, 通过对系数矩阵的奇异性进行分析, 提出了改进的最小二乘椭圆拟合算法, 克服了原有算法的不稳定性问题。同时将六维特征矢量的求解转化为三维特征矢量求解, 在保证校准精度的情况下降低了计算量, 并在校准过程中具有较强的抗突变干扰能力。实验结果验证了此方法的有效性和实用性, 校准后的磁罗盘精度达到 $0.4^\circ$ 左右, 满足了导航系统的需求。

lectronic compass for mobile robot in an indoor environment [C]. *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, 2006: 2963-2970.

- [6] YUN J, KO J P, LEE J. An inexpensive and accurate position sensor for driving assistance [J]. *Instrumentation and Measurement*, 2008, 57(4): 864-873.
- [7] BOWDITCH N. *The American Practical Navigator* [M]. Bethesda: Hydrographic Topographic Center, 1984: 201-259.
- [8] DEMOZ G E. Calibration of strapdown magnetometers in magnetic field domain [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2006, 19(2): 87-102.
- [9] FITZGIBBON A, PILU M, FISHER R. Direct least square fitting of ellipses [J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(5): 476-480.
- [10] HALIR R, FLUSSER J. Numerically stable direct least squares fitting of ellipses [C]. *Proceedings International Conference in Central Europe on Computer Graphics*, Skala, 1998: 125-132.

## 作者简介:



孙宏伟(1982—),男,山东青州人,博士研究生,主要研究领域为微惯性测量单元集成及标定补偿技术,微磁罗盘集成及标定校准技术,微航姿参考系统集成及组合定姿技术等。E-mail: hongweisun@aspe. buaa. edu. cn



李 艳(1967—),女,河北石家庄人,高级工程师,主要研究领域为无人机通信及信息管理等。E-mail: springbuaa@163. com

## 导师简介:



房建成(1965—),男,山东临沂人,教授,博士生导师,主要从事航天器姿态控制技术及自主定位导航技术,微惯性器件及系统集成技术等方面的研究。E-mail: fangjiancheng@buaa. edu. cn

## ● 下期预告

## 真空紫外闪耀硅光栅的制作

盛 斌,徐向东,刘 颖,洪义麟,付绍军

(中国科学技术大学 国家同步辐射实验室,安徽 合肥 230029)

利用单晶硅在 KOH 溶液中的各向异性刻蚀的特性,在相对 Si(111)面切偏角度为  $5^\circ$  的单晶片上制作 1 200 line/mm 的真空紫外闪耀光栅。工艺上结合全息干涉曝光以及光刻胶灰化技术,在单晶硅表面得到小占宽比的高质量光刻胶掩模,用湿法刻蚀将光栅掩模图形转移到单晶硅表面的天然氧化层上,并将其作为硅各向异性湿法刻蚀的掩模,成功获得接近于理想锯齿槽形的闪耀光栅。结果:光栅闪耀面经过原子力显微镜进行分析,其表面均方根粗糙度约为 0.2 nm。通过在真空紫外波段的衍射效率测量,发现光栅在 135 nm 波长处显示出良好的闪耀特性。此方法可以应用于真空紫外和软 X 射线波段的光栅制作上,在获得较高的槽形效率的同时,可以大大减少其制作难度及成本。